

TP Filtrage numérique

Capacités exigibles du programme :

Analyse spectrale

- Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition.
- Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.

Électronique numérique

- Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.

Liste du matériel :

- GBF
- Oscilloscope
- Interface d'acquisition Sysam-SP5
- Au bureau { Stroboscope
Disque tournant pour stroboscopie

1 Acquisition d'un signal

Acquisition d'un signal sinusoïdal :

Déterminer et mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de réaliser l'acquisition d'un signal sinusoïdal de fréquence 900 Hz et d'en tracer le spectre.

Phénomène de repliement du spectre :

Déterminer et mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de visualiser le repliement du spectre du signal précédent lorsque la condition de Nyquist-Shannon n'est pas vérifiée.

2 Filtrage numérique

Réalisation d'un filtre passe-bas :

Déterminer et mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de réaliser un filtre numérique passe-bas d'ordre 1.

Réalisation d'un filtre passe-haut :

Déterminer et mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de réaliser un filtre numérique passe-haut d'ordre 1.

Réalisation d'un filtre passe-bande :

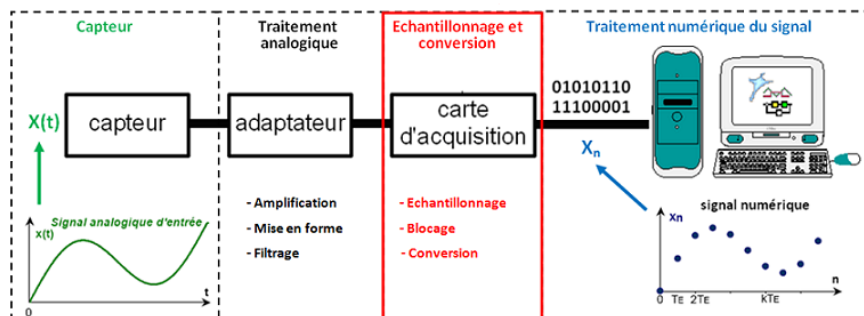
Déterminer et mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de réaliser un filtre numérique passe-bande d'ordre 2.

A Annexe 1 - Électronique numérique

La mesure d'un signal, qualifié « d'analogique », se réalise en général à l'aide d'un « capteur » auquel il faut souvent ajouter un « adaptateur ». Par exemple un microphone ne délivrera une tension que de l'ordre du mV, il faudra donc l'amplifier.

Si l'on désire réaliser un traitement numérique de ce signal, une conversion « analogique-numérique » (« CAN ») doit être réalisée. C'est par exemple ce que réalise une carte d'acquisition.

On peut représenter l'ensemble de la chaîne d'acquisition¹ ainsi :



A.1 Échantillonnage

A.1.1 Définition

L'échantillonnage est l'opération qui consiste à mesurer un signal en capturant des valeurs à intervalles réguliers.

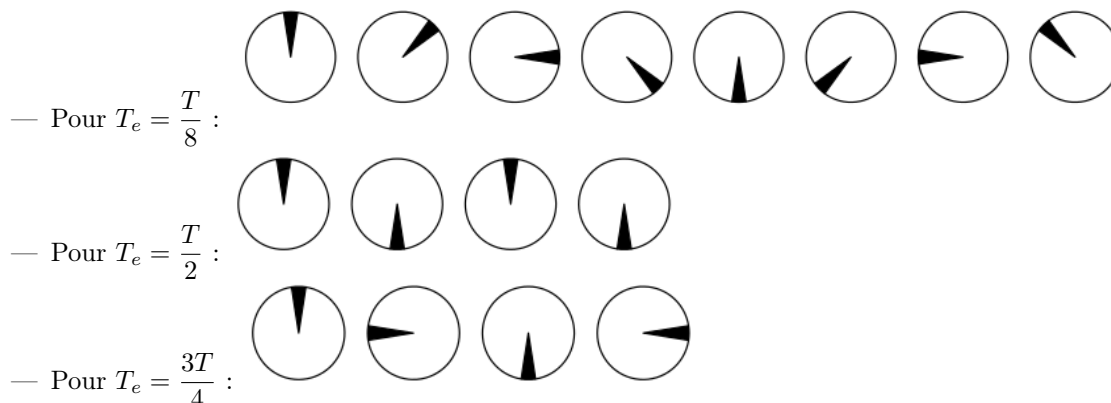
L'intervalle de mesure s'appelle la **période d'échantillonnage**, notée T_e . Se pose alors la question de savoir si les échantillons sont représentatifs du signal initial.

A.1.2 Analyse stroboscopique

Tout le monde a pu constater, en regardant un film où les véhicules possèdent des roues à barreaux, que les roues ne tournent pas à la bonne vitesse, voire dans le mauvais sens. Cela est dû à une inadéquation entre la fréquence de rafraîchissement des images (24 images par seconde en général), la vitesse de rotation et le nombre de barreaux des roues.

L'expérience suivante permet d'illustrer ce phénomène :

on considère un disque blanc avec un secteur noir, en rotation à vitesse constante, à la fréquence $f = \frac{1}{T}$. On observe ce disque dans l'obscurité. Un stroboscope éclaire le disque par éclairs, à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$: T_e représente la fréquence d'échantillonnage. Voici ce que l'on observe :



1. L'échantillonnage et le blocage consistent à prélever les valeurs du signal à intervalle de temps défini (**échantillonnage**), puis de figer la mesure (**blocage**) pendant la durée de la conversion en signal analogique (**conversion**).

On constate que dans le premier cas, le disque semble tourner dans le bon sens, dans le second on ne peut déterminer le sens de rotation, et dans le troisième dans le mauvais sens. Dans ce dernier cas il y a **sous-échantillonnage** : le signal échantillonné est sans rapport avec le signal réel.

A.1.3 Théorème de Nyquist-Shannon

À la suite des constatations précédentes, on admet le théorème de Nyquist-Shannon² :

Un signal est correctement représenté à partir de ses échantillons, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à **deux fois** la fréquence maximale de son spectre.

Ce théorème s'énonce parfois à l'aide de la **condition de Nyquist-Shannon**, qui est la condition nécessaire à une bonne représentation :

$$f_e > 2f_{\max}$$

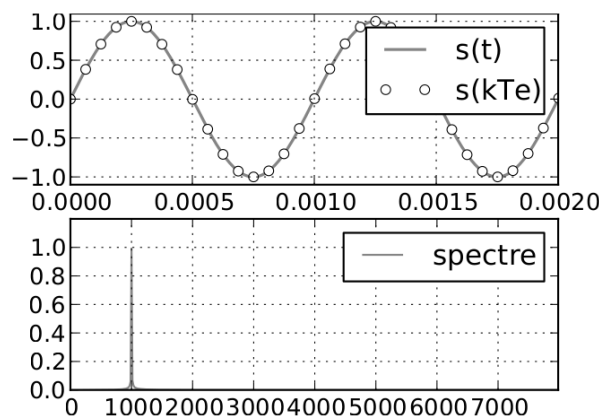
Un exemple d'application de ce théorème est fourni par le format des CD musicaux. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 44 kHz, supérieure au double de la fréquence maximale audible par une oreille humaine, qui est de l'ordre de 20 kHz.

A.2 Spectre d'un signal échantillonné

A.2.1 Tracé du spectre

Il a été vu en première année que tout signal temporel possède une **représentation spectrale**. À l'aide des échantillons de ce signal, il existe un algorithme appelé FFT, acronyme de l'anglais *Fast Fourier Transform*, qui permet d'avoir une représentation approchée de son spectre. Cet algorithme, de complexité quasi-linéaire, est implanté par exemple dans les oscilloscopes numériques, les cartes graphiques des ordinateurs, les tableurs, et dans toutes les bibliothèques de calcul numérique.

Sur l'exemple suivant, le critère de Shannon est largement vérifié avec $f_e = 16f$:



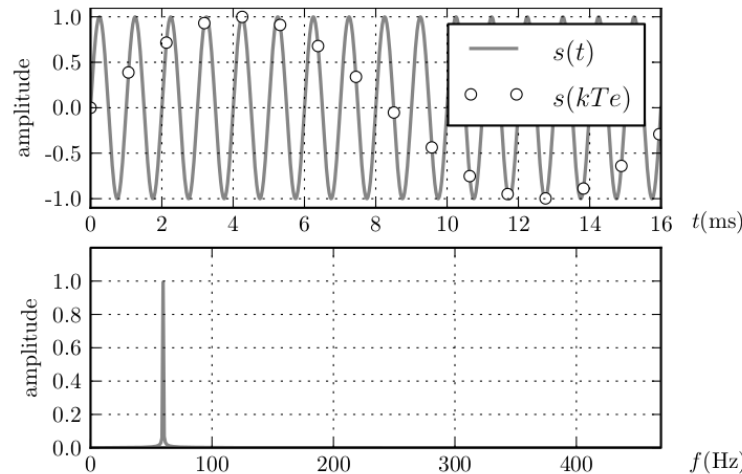
Le spectre obtenu est cohérent, mais s'étend inutilement jusqu'à $8 \text{ kHz} = \frac{f_e}{2}$, le spectre est tassé sur la gauche.

Ce résultat est important lorsque l'on cherche à calculer un spectre numériquement :

L'étendue du spectre calculé par l'algorithme FFT s'étale de 0 à $\frac{f_e}{2}$.

2. Claude Shannon, 1916 - 2001, ingénieur et mathématicien américain

Dans l'exemple suivant, le critère de Shannon n'est plus respecté avec $f_e = \frac{16}{17}f$:



Les échantillons « dessinent » une sinusoïde de fréquence plus faible que celle du signal. C'est celle que l'œil reconstitue à partir des échantillons, c'est aussi celle que détermine l'algorithme FFT. L'information sur la fréquence initiale a disparue, il y a perte d'information, pire : l'information est faussée.

Remarque : La même mésaventure peut arriver avec un oscilloscope numérique. Le signal visualisé est bien sûr échantillonné. En contractant l'oscillogramme, on diminue le nombre d'échantillons par période. Si la limite de Shannon est dépassée, apparaît alors à l'oscilloscope un signal de plus basse fréquence, sans rapport avec le signal étudié.

A.2.2 Repliement du spectre

On constate sur la figure précédente que le signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence $f > \frac{f_e}{2}$ est perçu comme un autre signal sinusoïdal $s'(t)$ de fréquence f' telle que $f' < \frac{f_e}{2}$, et de même amplitude que $s(t)$. Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer la relation entre ces fréquences.

On pose $s(t) = A \cos(2\pi ft)$ et on cherche $s'(t)$ sous la forme $s'(t) = A \cos(2\pi f't + \varphi)$. Les signaux étant égaux en $t = 0$ on a $\varphi = 0$.

Comme les signaux doivent coïncider pour chaque instant $t = kT_e$:

$$A \cos(2\pi f k T_e) = A \cos(2\pi f' k T_e)$$

D'où :

$$2 \sin(k\pi(f - f')T_e) \sin(k\pi(f + f')T_e) = 0$$

Soit :

$$\pi(f - f')T_e = \pi \text{ ou } \pi(f + f')T_e = \pi$$

Soit finalement :

$$f' = f - f_e \text{ ou } f' = -f + f_e = -(f - f_e)$$

Ainsi, par exemple, pour $f_e = 1000$ Hz :

- $f = 900$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 100$ Hz
- $f = 1100$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 100$ Hz
- $f = 1900$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 900$ Hz soit $f' = 100$ Hz
- $f = 2100$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 1100$ Hz soit $f' = 100$ Hz
- $f = 2900$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 1900$ Hz soit $f' = 900$ Hz soit $f' = 100$ Hz
- $f = 3100$ Hz sera perçu comme un signal de $f' = 2100$ Hz soit $f' = 1100$ Hz soit $f' = 100$ Hz
- etc...

Ainsi toutes les fréquences ne vérifiant pas la condition de Nyquist-Shannon se retrouvent dans l'intervalle $[0, f_e/2[$. Ce phénomène s'appelle **le repliement du spectre**. Il est responsable de l'apparition de raies dans le spectre du signal échantillonné qui n'existent pas dans le spectre du signal réel.

A.3 Acquisition d'un signal

A.3.1 Paramètres d'acquisition

Expérimentalement, on pourra régler trois paramètres :

- le nombre de points N ;
- la période d'échantillonnage T_e ;
- la durée de l'acquisition D .

On utilisera donc la relation :

$$T_e = \frac{D}{N}$$

A.3.2 Choix de la période d'échantillonnage et de la durée d'acquisition

On prendra soin d'avoir :

$$T_e \ll T$$

inférieur au facteur 2 théorique minimum (condition de Nyquist-Shannon), expérimentalement souvent d'un facteur 20.

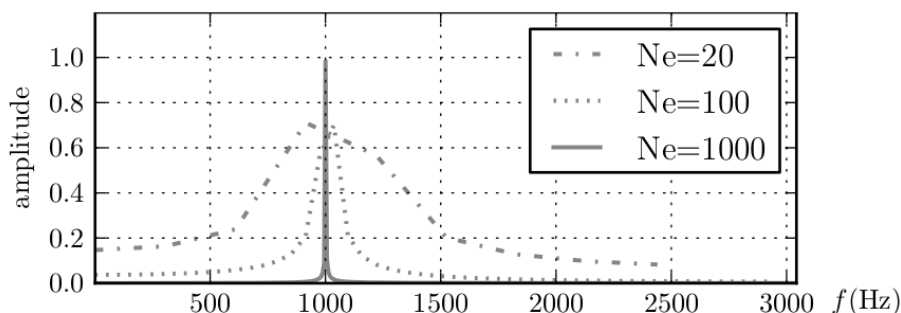
Le choix de la durée d'acquisition se fait souvent avec le nombre n de périodes que l'on souhaite voir à l'écran :

$$D \sim nT$$

A.3.3 Choix de la durée d'acquisition

Une fois la période d'échantillonnage T_e choisie, il faut choisir le nombre de points N ou la durée d'acquisition D .

Ces deux paramètres vont jouer sur la **résolution spectrale** Δf , c'est à dire l'écart entre deux points sur le spectre.



On peut montrer que :

$$\Delta f = \frac{1}{D} = \frac{1}{NT_e}$$

La résolution spectrale sera d'autant meilleure que D et N sont grands.

B Annexe 2 - Filtrage numérique

B.1 Acquisition, traitement et production d'un signal numérique

B.1.1 Introduction

Le traitement numérique d'un signal (calculs) est en général confié à des composants dédiés à cette tâche, les DSP (Digital Signal Processor). On les trouve en particulier dans les cartes graphiques des ordinateurs.

Pour faire le lien entre ces processeurs et le monde réel, analogique, deux autres composants sont souvent nécessaire : un **convertisseur analogique-numérique** en entrée et un **convertisseur numérique-analogique** en sortie, souvent abrégés en **CAN** et **CNA**.

B.1.2 Utilisation d'une interface d'acquisition

Une interface d'acquisition possède des entrées analogiques qui permettent la conversion analogique numérique : le signal d'entrée est échantillonné à une fréquence f_e qui peut aller typiquement jusqu'à 10 MHz. L'interface possède également des sorties qui permettent la conversion numérique analogique, et un logiciel permet de piloter cette interface, c'est à dire d'effectuer les réglages, programmer des calculs, afficher les résultats, etc...

B.2 Élaboration d'un filtre numérique

B.2.1 Exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre

La forme générale d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est donnée par :

$$\frac{s}{e} = \frac{1}{1 + jx}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\tau$

L'équation différentielle associée est donc :

$$s + \tau \frac{ds}{dt} = e$$

On peut « discrétiser » cette formule de façon à utiliser la méthode d'Euler :

$$ds = \frac{dt}{\tau}(e - s)$$

Soit :

$$s[n + 1] = s[n] + \frac{T_e}{\tau} \times (e[n] - s[n])$$

avec T_e la période d'échantillonnage.

B.2.2 Exemple d'algorithme, rédigé en Python

Il est alors très simple de programmer un tel filtre en Python :

```

1 def filtre_passe_bas_1o(e, te, tau):
    s=[0]
3     for n in range(len(e)-1):
        s.append(s[n]+te/tau*(e[n]-s[n]))
5     return(s)

```

filtre_passe_bas_exemple.py

La dernière page présente, sous forme de carte heuristique, le principe de construction de plusieurs filtres numériques en Python.

B.2.3 Exemple de programmation d'une interface d'acquisition

On peut aussi faire réaliser ce traitement numérique par l'interface d'acquisition elle-même (qui possède son propre calculateur) à l'aide du logiciel associé (ici le logiciel Latis-Pro pour les cartes Sysam-SP5). Par exemple pour une période d'échantillonnage $T_e = 2 \mu s$ réglée lors de l'acquisition et un filtre de fréquence de coupure $f_c = 1590$ Hz, on a :

```
Te=2e-6
fc=1590
tau=1/(2*PI*fc)
S[1]=0
S[n]=S[n-1]+Te/tau*(EA0[n-1]-S[n-1])
```

Il faut ainsi entrer ce code dans la « Feuille de calculs » (attention la période d'échantillonnage doit correspondre à celle utilisée lors de l'acquisition), puis faire afficher la courbe « S » sur la même fenêtre que le signal d'entrée « EA0 » pour visualiser le résultat. Pour réaliser le filtrage numérique en direct et visualiser le résultat à l'oscilloscope, il faut configurer l'acquisition en « mode permanent », régler les options de déclenchement puis configurer la « sortie 1 » pour qu'elle génère le signal « S ».

