Quelques aspects des incertitudes expérimentales

1 Vocabulaire, définitions

Mesurage : ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.
Mesurande : grandeur particulière soumise à mesurage (longueur, masse, intensité,...).
Mesure : résultat d'un mesurage.
Valeur vraie d'un mesurande : mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas et on parle également de « valeur théorique ».
Grandeur d'influence : grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage.
Erreur : écart entre une mesure et la valeur vraie.

Les différents types d'erreurs peuvent être représentés ainsi :

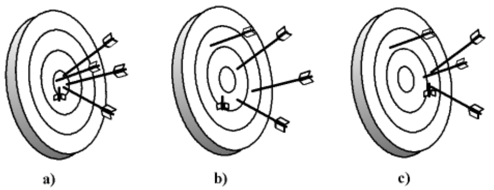


FIGURE 1 – Dans toutes ces cibles, le centre correspond à la valeur vraie. En a) les erreurs sont faibles, les mesurages ont donc été effectués avec précision, et les mesures centrées sur la valeur vraie. En b) les erreurs sont grandes et dispersées de manière stochastique autour de la valeur vraie : on parle **d'erreur aléatoire**. En c) les erreurs sont faibles (peu d'erreurs aléatoires) autour d'une valeur centrale qui n'est pas la valeur vraie : une **erreur systématique** s'est glissée dans les expériences. On a ajouté aussi une **erreur accidentelle**.

On notera :

Δm **l'incertitude élargie**, qui caractérise l'intervalle de confiance, en général à 95 %
δm **l'incertitude type**, qui caractérise la dispersion des mesures
$\dfrac{\Delta m}{m}$ la **précision** de la mesure, exprimée en %
C'est **l'incertitude élargie** Δm qui nous intéresse puisque le résultat d'une mesure s'écrit :

$$\boxed{m = \ldots \pm \Delta m}$$

L'incertitude peut être estimée :
- À partir d'une série de N mesures indépendantes du même phénomène, dans des conditions strictement identiques (protocole, échantillon, personne qui mesure, etc...) : c'est l'évaluation de **type A**.
- À partir de toute autre méthode, c'est l'évaluation de **type B**.

En travaux pratiques, nous ne sommes rigoureusement confrontés qu'à l'évaluation de **type B**, mais nous serons ammenés, en première approximation, à évaluer une incertitude de **type A** sur l'ensemble des mesures d'un groupe.

Évaluation de type A :
La détermination de cette **incertitude élargie** Δm se fera simplement en combinant les différentes mesures effectuées (voir section 3).

Évaluation de type B :
La détermination de cette **incertitude élargie** Δm se fera en deux étapes (voir section 2) :
- application de la méthode « différentielle » pour déterminer l'expression de cette incertitude (méthode pessimiste) ;
- correction de cette méthode par des considérations probabilistes.

2 Cas d'une mesure unique - Évaluation de type B

2.1 Méthode « pessimiste » dite « différentielle »

Considérons deux exemples types, mais la méthode est générale :

Étape	**Somme**	**Produit**
Expression	$m = \alpha\, x + \beta\, y$	$m = \alpha\, x^{\gamma} y$
Transformation intermédiaire	Non nécessaire	$\ln m = \ln \alpha + \gamma \ln x + \ln y$
Différentiation	$\mathrm{d}m = \alpha\ \mathrm{d}x + \beta\ \mathrm{d}y$	$\dfrac{\mathrm{d}m}{m} = \gamma \dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$
Passage aux intervalles	$\Delta m = \lvert\alpha\rvert\ \Delta x + \lvert\beta\rvert\ \Delta y$	$\dfrac{\Delta m}{m} = \lvert\gamma\rvert \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$

On obtient alors une expression permettant de calculer l'incertitude d'une mesure à partir des incertitudes sur les grandeurs dont elle dépend.

Cette méthode « différentielle » est très pessimiste, car elle évalue en réalité l'écart maximal avec la valeur de la grandeur à mesurer.

On peut donc « corriger » cette méthode par une approche probabiliste.

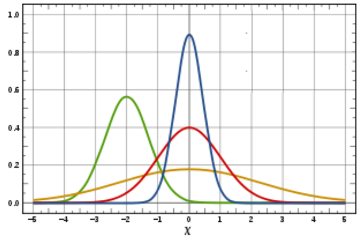
2.2 Correction de la méthode par des considérations probabilistes

2.2.1 Quelques explications (vous pouvez passer ce paragraphe)

Des mesures indépendantes x d'une grandeur se répartissent selon une loi de distribution gaussienne [1], c'est à dire que le nombre de mesures donnant x pour résultat a une répartition du type :

1. Appelée aussi loi normale.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\dfrac{(x-x_{\text{moy}})^2}{2\sigma^2}}$$



où x_{moy} est la valeur moyenne des mesures (qui donne une bonne estimation de la valeur de la valeur de la grandeur à mesurer) et σ l'écart type qui permet de quantifier la dispersion (répartition) des mesures autour de x_{moy}, et donc donne un renseignement sur l'incertitude associée.

En pratique, les petites erreurs sont les plus probables, les erreurs importantes sont rares.

La probabilité qu'une mesure soit dans l'intervalle $[x_{\text{moy}} - k\sigma; x_{\text{moy}} + k\sigma]$ est donnée par :

$$\int_{x_{\text{moy}}-k\sigma}^{x_{\text{moy}}+k\sigma} f(x)\mathrm{d}x$$

L'intervalle $[x_{\text{moy}} - k\sigma\ ;\ x_{\text{moy}} + k\sigma]$ est l'intervalle de confiance pour le niveau de confiance choisi. Si $k = 1$, la probabilité d'avoir une valeur entre $x_{\text{moy}} - \sigma$ et $x_{\text{moy}} + \sigma$ est de 68%. En général on travaille avec $k = 2$, pour une probabilité de présence de 95%.

En pratique, on appellera **incertitude type** δm telle que la probabilité qu'une nouvelle mesure soit dans l'intervalle $[\ldots - \delta m\ ;\ \ldots + \delta m]$ est de 68%. On appellera **incertitude élargie** $\Delta m = 2 \times \delta m$ celle pour laquelle cette probabilité est de 95% [2].

2.2.2 Correction de la méthode différentielle

On montre que, pour des erreurs indépendantes, il faut combiner les incertitudes de manière quadratique :

Étape	Somme	Produit
Expression	$m = \alpha\ x + \beta\ y$	$m = \alpha\ x^\gamma y$
Expression avec les intervalles	$\Delta m = \lvert\alpha\rvert\ \Delta x + \lvert\beta\rvert\ \Delta y$	$\dfrac{\Delta m}{m} = \lvert\gamma\rvert \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$
Combinaison des incertitudes	$\Delta m = \sqrt{(\alpha\ \Delta x)^2 + (\beta\ \Delta y)^2}$	$\dfrac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\gamma \dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$

Le résultat de la mesure s'écrit enfin : $\boxed{m = \ldots \pm \Delta m}$

2. On travaillera donc avec $k = 2$. Il est parfois nécessaire dans l'industrie de travailler avec d'autres valeurs, par exemple $k = 3$ donne 99,7% et $k = 6$ donne $100 - 2 \times 10^{-7}$%.

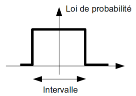
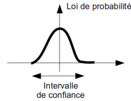
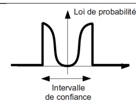
2.2.3 Estimation pratique de l'incertitude

On appliquera les règles suivantes pour évaluer l'incertitude élargie Δx associée à une grandeur x :

Cas	Incertitude élargie (choix [3] $k = 2$)
Appareil analogique (thermomètre gradué, vernier, etc...	$\Delta x = \dfrac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{3}}$
Appareil numérique (multimètre, thermomètre numérique, etc...) ou indication du constructeur (résistances, etc...)	$\Delta x = 2 \times$ Indication du constructeur
Limite du mode opératoire	À estimer au cas par cas (voir section 2.2.4)

2.2.4 Autres sources d'incertitudes

Si d'autres sources d'incertitudes apparaissent, indépendantes les unes des autres, l'estimation de l'incertitude élargie va dépendre de la probabilité de présence de la valeur mesurée sur l'intervalle :

Probabilité de présence de la valeur mesurée sur l'intervalle	Forme de la loi de probabilité	Incertitude élargie (choix $k = 2$)
Probabilité uniforme sur l'intervalle		$\Delta x = \dfrac{\text{Largeur de l'intervalle}}{\sqrt{3}}$
Probabilité plus grande au milieu (loi gaussienne)		$\Delta x = \dfrac{\text{Largeur de l'intervalle de confiance}}{2}$
Probabilité plus grande sur les bords (loi en U)		$\Delta x = \dfrac{\text{Largeur de l'intervalle de confiance}}{\sqrt{2}}$

On réalise ensuite une composition quadratique de toutes les incertitudes élargies.

3. Ce choix de facteur d'élargissement ne se justifie en réalité que pour une loi gaussienne (voir section 2.2.1).

3 Cas d'une série de mesures - Évaluation de type A

À partir d'une série de N mesures indépendantes du même phénomène, dans des conditions strictement identiques (protocole, échantillon, personne qui mesure, etc...) ou, en première approximation quasi-identiques, on pourra estimer l'incertitude type δm de façon statistique :

$$\boxed{\delta m = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(m_i - \overline{m})^2}}{\sqrt{N}}}$$

avec $\overline{m} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$ la valeur moyenne des mesures.

L'incertitude élargie Δm se détermine en multipliant l'incertitude type δm par un coefficient t_N qui dépend du nombre de mesures effectuées et du niveau de confiance voulu appelé coefficient de Student :

	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	95 %	98 %	99 %	99,8 %
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
50	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
80	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
100	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

FIGURE 2 – Dans ce tableau sont listés les coefficients de Student pour un niveau de confiance donné (colonnes) et un nombre de mesures donné (lignes).

On a alors : $\Delta m = t_N \times \delta m$ et le résultat de la mesure s'écrit enfin : $\boxed{m = \ldots \pm \Delta m}$