

Calcul du débit volumique

$$\phi_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{p(0) - p(L)}{8\eta L} \frac{\pi R^4}{\pi R^4}$$

Chute de pression sur une longueur L

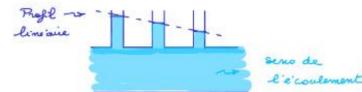
$$p(0) - p(L) = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot \phi_V = R_{hyd} \cdot \phi_V$$

Résistance hydraulique

$$R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

Profil de pression

$$p(x) = p(0) - \frac{8\eta\phi_V}{\pi R^4} x$$



Chute de pression sur une longueur L

$$\Delta p = R_{hyd} \cdot \phi_V$$

Résistance hydraulique

$$R_{hyd} = \frac{\Delta p}{\phi_V}$$

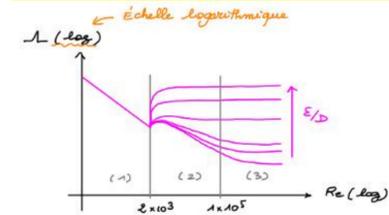
Coefficient de friction

$$\Lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{L}{D}}$$

Cas de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

$$\Lambda = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot \phi_V = \frac{64}{Re}$$

Cas général: diagramme (expérimental) de Moody



Loi de Hagen-Poiseuille

$$\Delta p = R_{hyd} \cdot \phi_V$$

Débit volumique

$$\phi_V = \frac{\Delta p}{R_{hyd}}$$

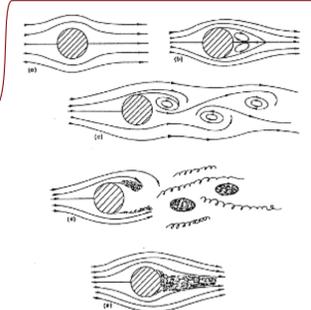
Influence du nombre de Reynolds

$$\Delta p \propto \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{L}{D}$$

Généralisation

$$\Delta p = \Lambda \times \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{L}{D}$$

Autour d'une sphère



Constatations expérimentales

- (a) $Re \sim 1$
- (b) $Re \sim 20$
- (c) $Re \sim 100$
- (d) $Re \sim 1000$
- (e) $Re \sim 10^6$

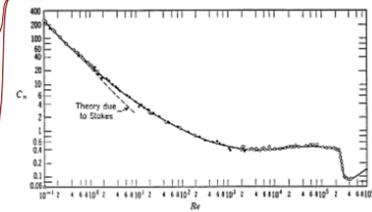
Maitre-couple : aire du projeté du solide dans un plan perpendiculaire à l'écoulement

S

Coefficient de traînée

$$C_x$$

Pour une sphère



Faible nombre de Reynolds

$$\ln C_x \approx -\ln Re + Cte \text{ soit } C_x \approx \frac{Cte}{Re}$$

$$F_t \propto U$$

Fort nombre de Reynolds

$$C_x \approx Cte \text{ soit } F_t \propto U^2$$

Force de traînée (colinéaire à l'écoulement)

$$F_t \propto \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot S$$

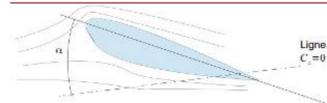
$$\text{Soit : } F_t = C_x \times \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot S$$

Écoulement autour d'un obstacle

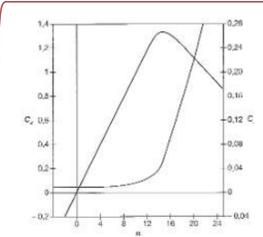
Coefficient de portance

$$C_z$$

Cas d'une aile d'avion



Coefficients de traînée et de portance



Constatations expérimentales
 $\alpha < 15^\circ$: portance qui augmente, traînée faible
 $\alpha \geq 15^\circ$: décrochage

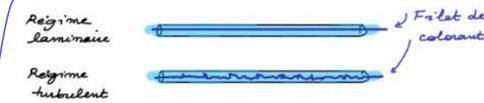
Force de portance (normale à l'écoulement)

$$F_p = C_z \times \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot S$$

Écoulements incompressibles et homogènes

La viscosité d'un fluide est responsable de nombreux phénomènes.

L'expérience de Reynolds (1883) : deux régimes d'écoulement



Un écoulement est laminaire si les lignes de courant sont localement parallèles entre elles à tout instant.



Introduction du nombre de Reynolds, sans dimension :

$$Re = \frac{\rho U D}{\eta}$$

- Masse volumique du fluide ρ
- Diamètre de la conduite D
- Viscosité dynamique η

Vitesse débitante à travers la section S de la conduite (vitesse caractéristique de l'écoulement)

$$U = \frac{\phi_V}{S} = \frac{\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\iint_S dS}$$

Débit convectif de quantité de mouvement (sens de l'écoulement) Vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p,conv} = \iint_S (\rho \vec{v}_x) \vec{v} \, dS'$$

$$\vec{j}_{p,conv} = (\rho \vec{v}_x) \vec{v}$$

Débit diffusif de quantité de mouvement (normal au sens de l'écoulement)

$$\vec{j}_{p,diff} = \iint_S -\nu \text{grad}(\mu v_x) \, dS$$

Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Vecteur densité de courant diffusif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p,diff} = -\nu \text{grad}(\mu v_x)$$

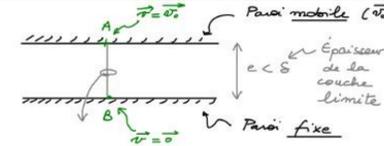
Nombre de Reynolds

$$\frac{j_{p,conv}}{j_{p,diff}} \sim \frac{\rho U D}{\eta} = Re$$

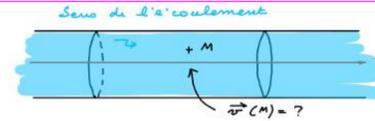
Le nombre de Reynolds caractérise la prédominance du transport convectif ou diffusif de quantité de mouvement.

- $Re \gg 1$: convection dominante
- $Re \ll 1$: diffusion dominante

Une interprétation du nombre de Reynolds dans l'écoulement de Couette plan



La chute de pression le long d'une conduite dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique



Écoulement laminaire

$$\vec{v} = v(r, x) \vec{e}_x$$

Écoulement incompressible et homogène

$$\text{div} \vec{v} = 0 \text{ soit } \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Caractéristiques de la vitesse

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_x$$

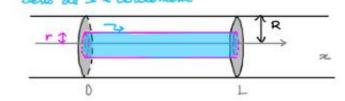
Bilan de quantité de mouvement sur un cylindre de fluide

$$\vec{F}_{pression} + \vec{F}_{viscosité} = \frac{dv}{dt} = \vec{0}$$

$$(p(0) - p(L))\pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r} 2\pi r L = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p(0) - p(L)}{2\eta L} r \text{ soit } v = -\frac{p(0) - p(L)}{4\eta L} r^2 + Cte$$

Sens de l'écoulement



Profil de vitesse

$$v(r=R) = 0 \text{ soit : } v = -\frac{p(0) - p(L)}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

