Fluides en écoulement

Lois de conservation

Écoulement stationnaire

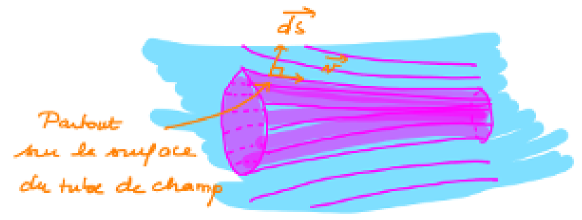
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \text{ soit } \boxed{\mathrm{div}(\mu \vec{v}) = 0}$$

Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

Conservation du débit massique dans un tube de courant

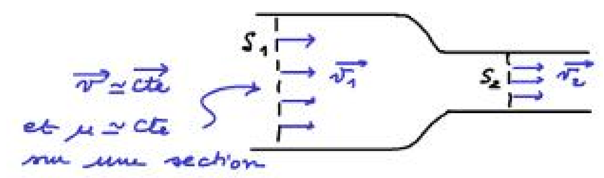
$$\phi_m = \oint_S \mu \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu \vec{v})\ \mathrm{d}V = 0$$

$$\boxed{\phi_{m,\text{entrant}} = \phi_{m,\text{sortant}}}$$



Exemple

$$\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2$$



Écoulement incompressible et homogène

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \text{ soit } \mathrm{div}(\mu \vec{v}) = 0 = \mu \ \mathrm{div}\ \vec{v} + (\mathrm{grad}\mu) \cdot \vec{v} = \mu \ \mathrm{div}\ \vec{v}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{v} = 0}$$

Masse volumique constante et uniforme

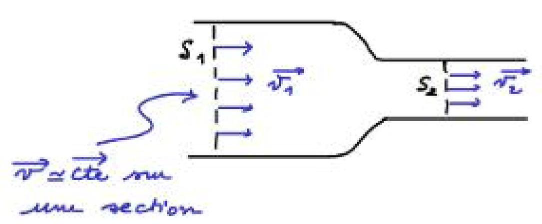
Conservation du débit volumique dans un tube de courant

$$\phi_V = \oint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{v}\ \mathrm{d}V = 0$$

$$\boxed{\phi_{V,\text{entrant}} = \phi_{V,\text{sortant}}}$$

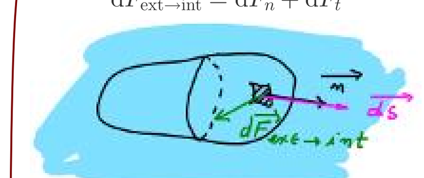
Exemple

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$



Actions de contact sur un fluide

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{ext}\to\text{int}} = \mathrm{d}\vec{F}_n + \mathrm{d}\vec{F}_t$$



Composante normale : **force de pression**

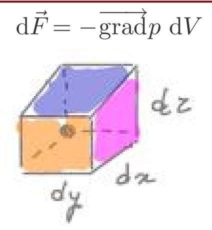
$$\mathrm{d}\vec{F}_n = -p\ \mathrm{d}\vec{S}$$

Résultante des forces

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot}} = \iint_S -p_{\text{tot}}\ \mathrm{d}\vec{S}}$$

Cas d'une **particule** de fluide : force **volumique** de pression

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} p\ \mathrm{d}V$$



Équation locale de la statique des fluides

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} p = \mu\ \vec{g}}$$

$$\frac{dp}{dz} = \mu g \qquad \frac{dp}{dz} = -\mu g$$

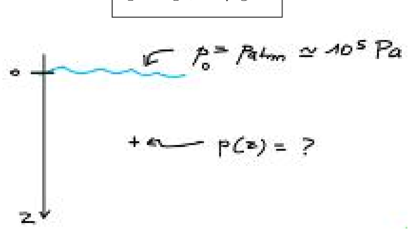
Poussée d'Archimède

$$\boxed{\vec{F}_A = -\mu_{\text{fluide}} V_{\text{corps}}\ \vec{g}}$$

Exemples

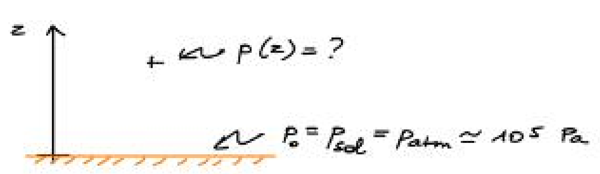
Colonne de fluide incompressible

$$\boxed{p = p_0 + \mu g z}$$



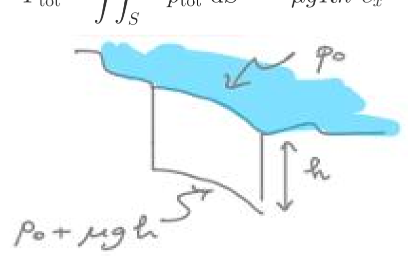
Atmosphère isotherme

$$\boxed{p = p_0\ \mathrm{e}^{-z/H}} \text{ avec } H = \frac{RT_0}{Mg}$$



Barrage hydraulique

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \iint_S -p_{\text{tot}}\ \mathrm{d}\vec{S} = -\mu g R h^2 \vec{e}_x$$

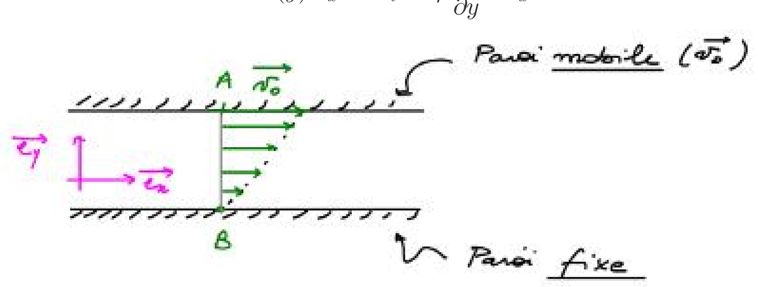


Composante tangentielle : **force de viscosité**

$$\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}S\ \vec{e}_x$$

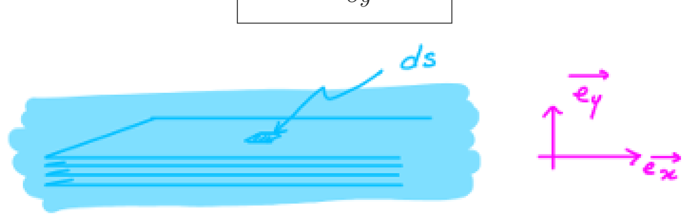
Écoulement de Couette plan

$$\vec{v} = v(y)\ \vec{e}_x \text{ et } \vec{F}_t = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S\ \vec{e}_x$$



Loi de Newton : dans un écoulement parallèle, une couche de fluide supérieure exerce sur une surface élémentaire d'une couche de fluide inférieure une force

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}S\ \vec{e}_x}$$



On parle de **fluides newtoniens**.

Coefficient de viscosité dynamique

$$\eta$$

Unité : le **Poiseuil**

$$\mathrm{P}\ell \text{ (ou Pa.s)}$$

Condition d'adhérence : au contact d'une paroi, la vitesse du fluide est nulle.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}}$$

Modélisation d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel **continu**, **déformable**, et **qui peut s'écouler**.

Une **particule de fluide** est de **taille mésoscopique**, soit grande à l'échelle microscopique et petite à l'échalle macroscopique.

$$\ell^3 << \mathrm{d}V << L^3$$

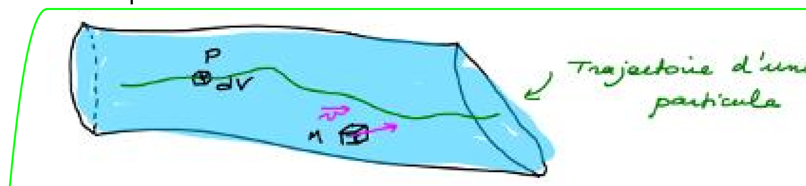
Typiquement

$$\mathrm{d}V \sim 1\ \mu\mathrm{m}^3$$

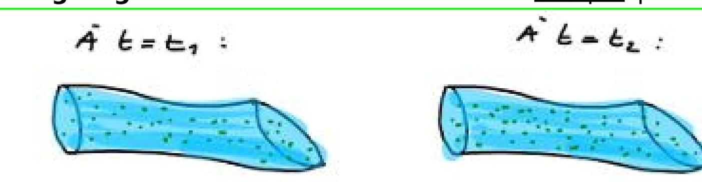
Masse volumique

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Description du mouvement d'un fluide



Description lagrangienne : on suit le mouvement de chaque particule P de fluide.



Description eulérienne : on étudie les caractéristiques des particules qui passent en chaque point M de fluide.

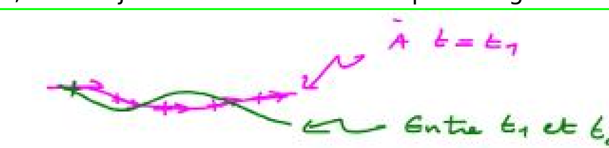
Accélération d'une particule de fluide

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}) \cdot \vec{v}$$

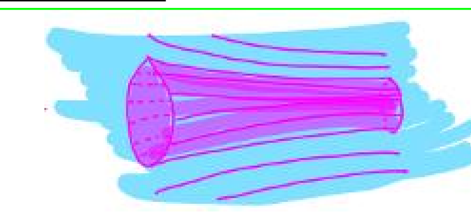
Dérivée particulaire

Une **ligne de courant** est une courbe tangente en chacun de ses points et à tout instant au vecteur vitesse.

Au cours du temps, une trajectoire se forme alors qu'une ligne de courant se déforme.



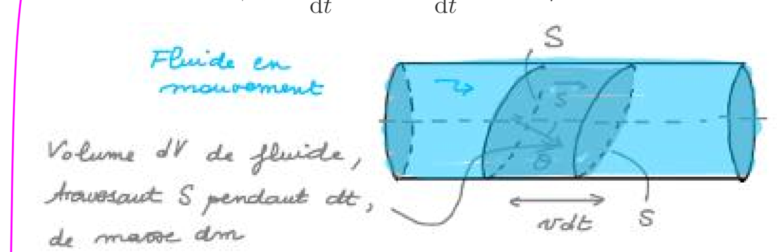
Un **tube de courant** est une surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé choisi arbitrairement



Caractéristiques du mouvement d'un fluide

Débit massique

$$\phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\ v\mathrm{d}t\ S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \mu \vec{v} \cdot \vec{S}$$

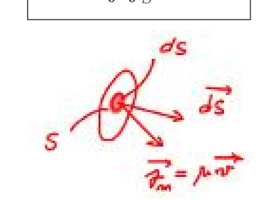


Vecteur densité de flux massique

$$\boxed{\vec{j}_m = \mu \vec{v}}$$

Flux massique ou **débit massique**

$$\boxed{\phi_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

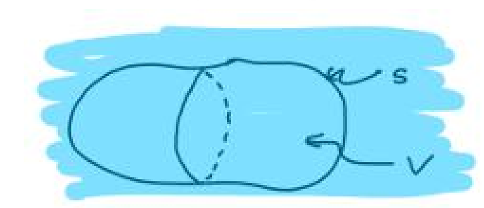


Champ uniforme

$$\boxed{\phi_m = \vec{j}_m \cdot \vec{S}}$$

Bilan de masse

$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \phi_m \text{ soit } -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \mu \mathrm{d}V = \oint_S \mu \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu \vec{v}) \mathrm{d}V$$

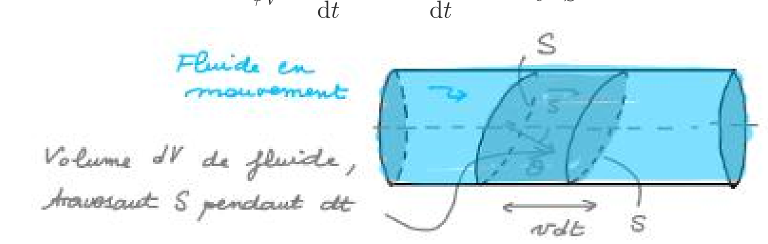


Équation locale de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu \vec{v}) = 0}$$

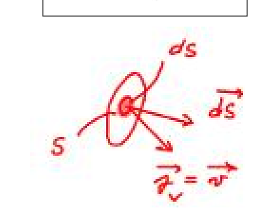
Débit volumique

$$\phi_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}t\ S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{S}$$



Flux volumique ou **débit volumique**

$$\boxed{\phi_V = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



Champ uniforme

$$\boxed{\phi_V = \vec{v} \cdot \vec{S}}$$