Transport de charge

On s'intéresse ici au transport de charges dans un milieu conducteur.

Définitions

Échelles de description de la matière

- Échelle macroscopique (dimension caractéristique) : L
- Échelle mésoscopique (volume élémentaire) : $\ell^3 << \mathrm{d}V << L^3$
- Échelle microscopique (libre parcours moyen) : ℓ

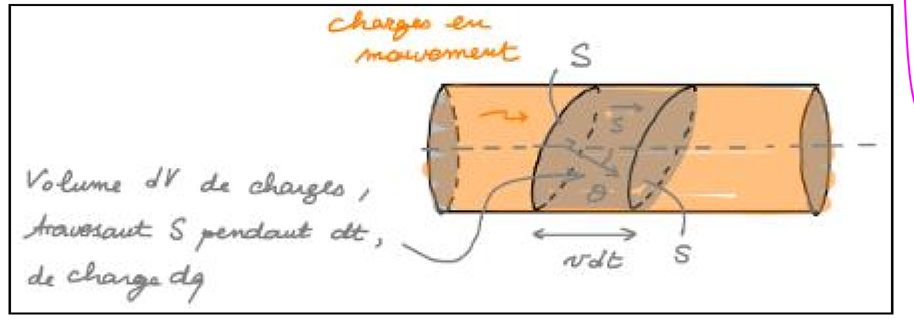
Densité volumique de charge

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}}$$

Caractéristiques d'un mouvement de charges

Courant électrique

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho\ v\mathrm{d}t\ S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \rho\ \vec{v}\cdot\vec{S} = \vec{j}\cdot\vec{S}$$

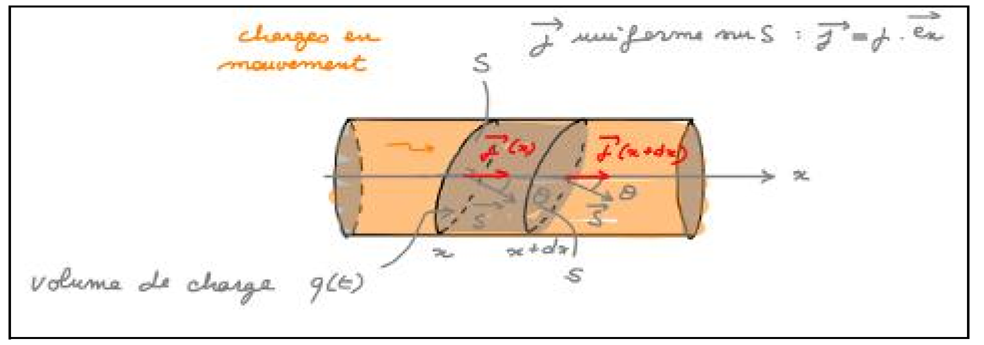


- Vecteur densité de courant électrique : $\boxed{\vec{j} = \rho\ \vec{v}}$
- Courant électrique : $\boxed{i = \iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$
  - Champ uniforme : $i = \vec{j}\cdot\vec{S}$

Bilan de charge

$$\frac{q(t+\mathrm{d}t)-q(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{j}(x)\cdot\vec{S} - \vec{j}(x+\mathrm{d}x)\cdot\vec{S}$$

$$\frac{\rho(t+\mathrm{d}t)-\rho(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{j(x+\mathrm{d}x)-j(x)}{\mathrm{d}x}$$

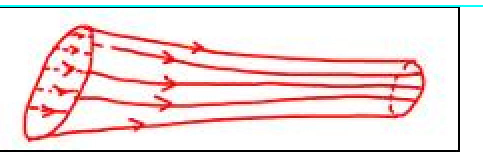


- Équation de conservation de la charge : $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0}$

Description d'un mouvement de charges

Une **ligne de courant** est une courbe **tangente** en tout point et à tout instant au vecteur densité de courant électrique.

Un **tube de courant** est la surface engendrée par les lignes de courant **s'appuyant sur un contour fermé choisi arbitrairement**.



Régime stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

La loi des noeuds

En **régime stationnaire**

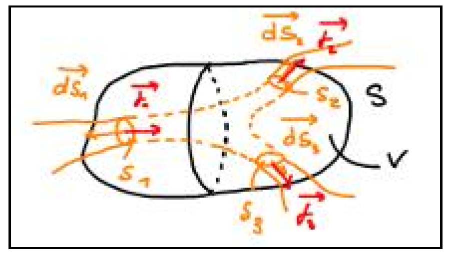
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ soit } \boxed{\mathrm{div}\vec{j} = 0}$$

Le **flux** du vecteur densité de courant électrique **à travers toute surface fermée** est donc nul. On dit que le vecteur densité de courant électrique est **à flux conservatif**.

$$\oint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{j}\ \mathrm{d}V = 0$$

On retrouve la **loi des noeuds**.

$$i_{\text{total}} = \oint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \text{ soit } -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

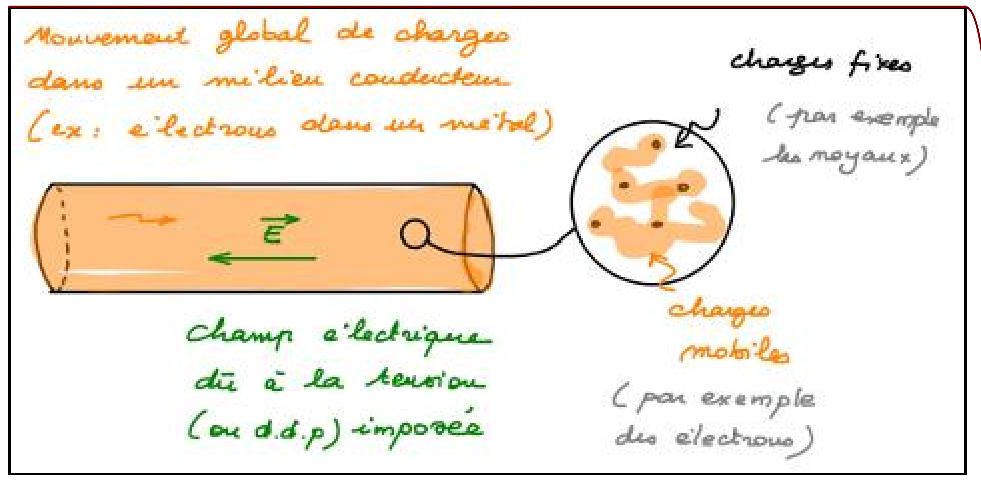


La loi d'Ohm

Définitions

- **Loi d'Ohm locale** : $\boxed{\vec{j} = \gamma\ \vec{E}}$
- Densité volumique de particules : n
- Expressions du vecteur densité de courant électrique : $\boxed{\vec{j} = \rho\ \vec{v} = \sum_i n_i\ q_i\ \vec{v}_i}$

Modèle de Drude de la conduction électrique



On modélise les **interactions entre charges mobiles et charges fixes** par une **force de frottement fluide**.

$$\vec{F}_f = -\alpha\ \vec{v}$$

PFD sur une charge mobile

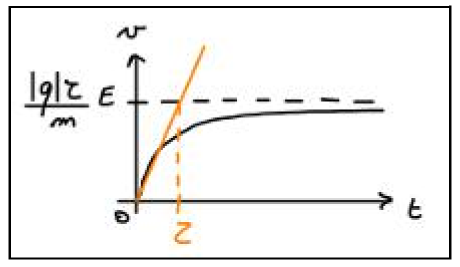
$$-\alpha\vec{v} + q\vec{E} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Solution (vitesse **moyenne** initiale nulle)

$$\vec{v} = \frac{q\ \tau}{m}\vec{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

$$\text{Si } t >> \tau : \quad \boxed{\vec{v} \simeq \frac{q\ \tau}{m}\vec{E}}$$



Expression de la **conductivité électrique**

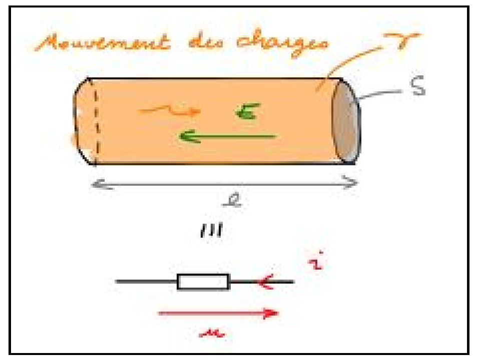
$$\vec{j} = n\ q\ \vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\ \vec{E} \text{ soit } \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

L'effet Joule

Résistance d'un conducteur cylindrique

$$i = \vec{j}\cdot\vec{S} = \gamma\ ES \text{ et } u = E\ \ell$$

$$\boxed{R = \frac{u}{i} = \frac{\ell}{\gamma\ S}}$$



Puissance électrique volumique reçue

$$\boxed{p_V = \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

$$\text{avec } p = \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\ \mathrm{d}V$$