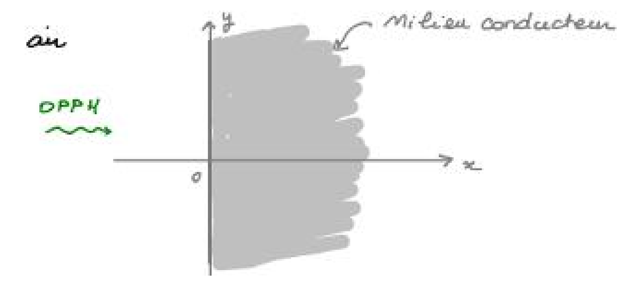
Phénomènes de propagation linéaires
Absorption et dispersion

Ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs



ARQS magnétique

$\vec{j}_D << \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\,\vec{j}_C}$

Électroneutralité locale

$\rho \simeq 0$ soit $\boxed{\mathrm{div}\vec{E} \simeq 0}$

Loi d'Ohm locale

$\boxed{\vec{j}_C \simeq \gamma_0 \vec{E}}$

Équation de propagation

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$ soit $\boxed{\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0\gamma_0}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}}$

C'est une équation de diffusion.

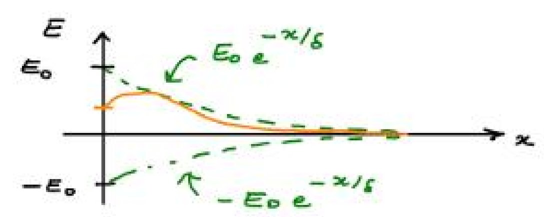
Résolution

Une onde de forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}(x)\ \mathrm{e}^{j(\omega t)}\ \vec{e}_y$ est solution de l'équation de propagation si :

$\boxed{\dfrac{\partial^2 \underline{E_0}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\ell^2}\ \underline{E_0} = 0}$ avec $\dfrac{1}{\ell^2} = j\ \mu_0\gamma_0\omega$

Structure de l'onde dans le conducteur

$\underline{E_0} = E_0\ \mathrm{e}^{-(1+j)x/\delta}$ soit $\boxed{\vec{E} = E_0\ \mathrm{e}^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)\ \vec{e}_y}$



Épaisseur de peau

$\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}$

Un conducteur s'oppose à la pénétration du champ électromagnétique. L'épaisseur de peau caractérise la profondeur de pénétration du champ dans le conducteur.

Conducteur parfait

$\boxed{\gamma_0 \to \infty}$

Épaisseur de peau

$\boxed{\delta \to 0}$

Champs

$p_V = \vec{j}\cdot\vec{E} \simeq \gamma_0 E^2$ doit rester fini soit $\boxed{\vec{E} \to \vec{0}}$

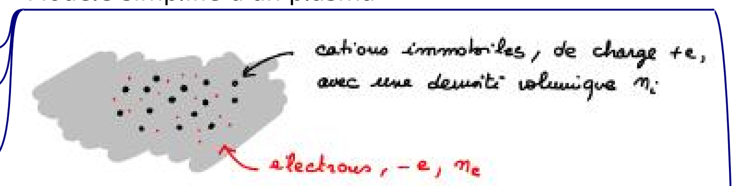
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\boxed{\vec{B} \to \vec{Cte} = \vec{0}}$

$\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\boxed{\rho \to 0}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\,\vec{j}_C$ soit $\boxed{\vec{j}_C \to \vec{0}}$

Plasma

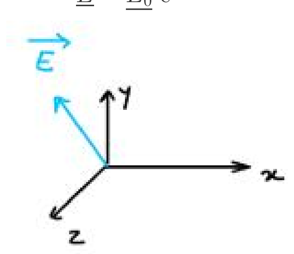
Modèle simplifié d'un plasma



- Milieu dilué, pas d'interaction entre constituants
- Constitué de cations immobiles: $m_{\mathrm{cation}} >> m_e$
- Milieu neutre

Propogation d'une OPPH transverse

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \underline{k}x)}$



Neutralité locale

$\mathrm{div}\vec{E} = 0$ soit $\boxed{\rho = 0}$

Conductivité électrique

PFD sur un électron

$\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}}$

Bilan des forces s'appliquant sur un électron

$\vec{P}$ négligeable

$\vec{F}_{\mathcal{L}} = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) \simeq -e\vec{E}$

car $||\vec{v}\wedge\vec{B}|| \sim \dfrac{vE}{c} << E$ (électrons non relativistes)

En régime variable

$\vec{v} \leftrightarrow \underline{\vec{v}}$ soit $jm\omega\ \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$

$\boxed{\underline{\vec{v}} = \dfrac{-e}{jm\omega}\underline{\vec{E}}}$

Conductivité électrique

$\underline{\vec{j}_C} = -n_e e\ \underline{\vec{v}}$ soit $\underline{\vec{j}_C} = \dfrac{n_e e^2}{jm\omega}\underline{\vec{E}}$

$\boxed{\underline{\gamma} = -j\dfrac{n_e e^2}{m\omega}}$

Densité volumique d'électrons: n_e

Le courant de conduction et le champ électrique sont en quadrature de phase.

$\dfrac{1}{j} = -j = \mathrm{e}^{-j\pi/2}$

Puissance moyenne nulle cédée au plasma

$< p_V > = < \vec{j}_C \cdot \vec{E} > = \dfrac{1}{2}\mathcal{R}_e(\underline{\vec{j}_C}\cdot\underline{\vec{E}}^*) > = \dfrac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\gamma})|\underline{E}|^2 = 0$

Relation de dispersion

Équations de Maxwell en notation complexe

$\mathrm{M.F}\ :\ -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$

$\mathrm{M.A}\ :\ -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}_C} + j\omega\mu_0\epsilon_0\underline{\vec{E}}$

$\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\dfrac{n_e e^2}{m}}$

Relation de dispersion

$\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m\epsilon_0}}}$

Conséquences

Pas d'absorption si

$\boxed{\omega > \omega_p}$ soit $\underline{k}$ réel soit $\boxed{k' = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$ et $\boxed{k'' = 0}$

$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - k'x)}}$

Vitesse de phase et de groupe

$v_\phi = \dfrac{\omega}{k'} = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

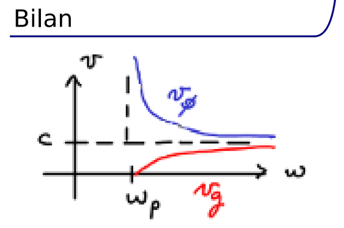
$v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} = \dfrac{c^2}{v_\phi}$

Onde evanescente si

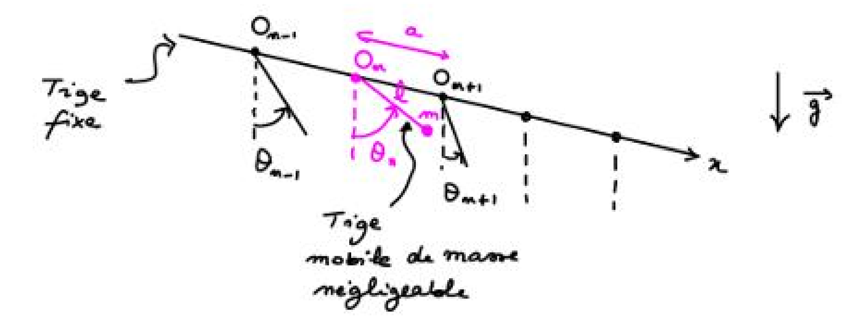
$\boxed{\omega < \omega_p}$ soit $\underline{k}$ imaginaire pur soit $\boxed{k'' = \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$ et $\boxed{k' = 0}$

$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\ \mathrm{e}^{-k''x}\ \mathrm{e}^{j\omega t}}$

Bilan



Exemple de milieu << dispersif >> : la chaîne infinie d'oscillateurs couplés



TMC

$\ddot{\theta}_n + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta}_n + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta_n + \dfrac{C}{m\ell^2}(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0$

Approximations des petits angles et des milieux continus

$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{g}{\ell}\theta - \dfrac{Ca^2}{m\ell^2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$

L'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert.

Relation de dispersion

Une OPPH de forme $\underline{\theta} = \underline{A}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$ est solution si :

$\boxed{k^2 = \dfrac{m\ell^2}{Ca^2}\left(\omega^2 - \dfrac{g}{\ell} - j\dfrac{\omega\alpha}{m}\right) = \underline{k}}$

Relation de dispersion

Relation de dispersion : relation entre le nombre d'onde et la pulsation

Une OPPH de forme $\underline{\theta} = \underline{A}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$ est solution de l'équation de propagation si :

$\boxed{\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - j\ k''(\omega)}$

Forme d'une solution en OPPH dans un milieu dispersif

$\boxed{\underline{\psi} = \underline{A}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \underline{k}x)} = \underline{A}\ \mathrm{e}^{-k''x}\mathrm{e}^{j(\omega t - k'x)}}$

Vitesse de phase

Dans un milieu non dispersif (régi par une équation de d'Alembert)

$\boxed{v_\phi = \dfrac{\omega}{k}}$ or (relation de dispersion) $k = \dfrac{\omega}{v}$ soit $\boxed{v_\phi = v}$

Dans un **milieu dispersif**

$\boxed{v_\phi = \dfrac{\omega}{k'(\omega)}}$

Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vistesse de phase dépend de la pulsation.

$\boxed{v_\phi(\omega)}$

Paquet d'onde

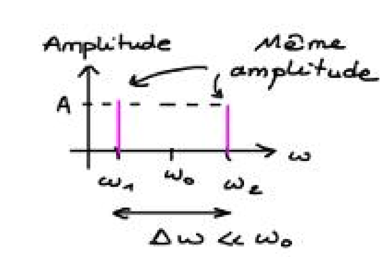
Une OPPH, d'une seule fréquence, est un modèle éloigné de la réalité. Une onde émise par une source est toujours émise pendant une durée finie, on peut alors montrer que son spectre est continu et s'étale autour d'une fréquence centrale. On la modélise par un << paquet d'onde >>.

Un **paquet d'onde** est une onde plane résultatnt de la superposition d'OPPH dont la fréquence varie continûment autour d'une fréquence centrale.

Exemple d'un paquet de deux ondes de pulsations voisines

$\psi = A\cos(\omega_1 t - {k'}_1 x) + A\cos(\omega_2 t - {k'}_2 x)$

avec $\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}$



FTY

${k'}_1(\omega) = k'(\omega_0 - \Delta\omega/2) \simeq k'(\omega_0) - \dfrac{\Delta\omega}{2}\dfrac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)$

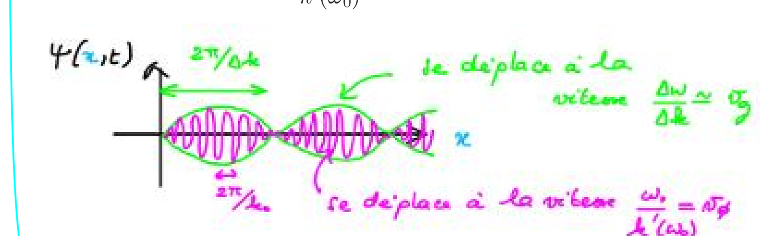
${k'}_2(\omega) = k'(\omega_0 + \Delta\omega/2) \simeq k'(\omega_0) + \dfrac{\Delta\omega}{2}\dfrac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)$

Forme du paquet d'onde

$\psi = 2A\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}\left(t - \dfrac{x}{\Delta\omega/\Delta k}\right)\right)\cos\left(\omega_0\left(t - \dfrac{x}{\omega_0/k'(\omega_0)}\right)\right)$

avec $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(\omega_0) = v_g$ la vitesse de groupe

et $\dfrac{\omega_0}{k'(\omega_0)} = v_\phi$ la vitesse de phase



La durée séparant deux minimas d'amplitude de l'enveloppe donne :

$\Delta t = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ soit $\boxed{\Delta f\cdot\Delta t = 1}$

Vitesse de groupe

Dans un milieu non dispersif (régi par une équation de d'Alembert)

$\boxed{v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}$ or (relation de dispersion) $k = \dfrac{\omega}{v}$ soit $\boxed{v_g = v}$

Dans un **milieu dispersif**

$\boxed{v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}}$

On a donc

$\boxed{v_g \neq v}$

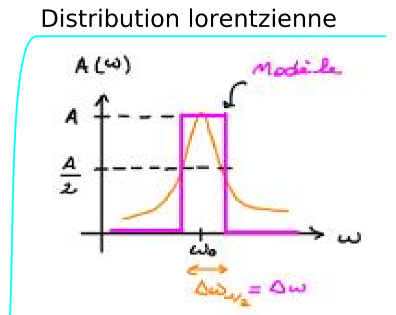
La vitesse de groupe s'apparente à la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'onde.

Dans un milieu dispersif chaque composante se déplace à une vitesse différente : un paquet d'onde se déforme.

Modèle du paquet d'onde

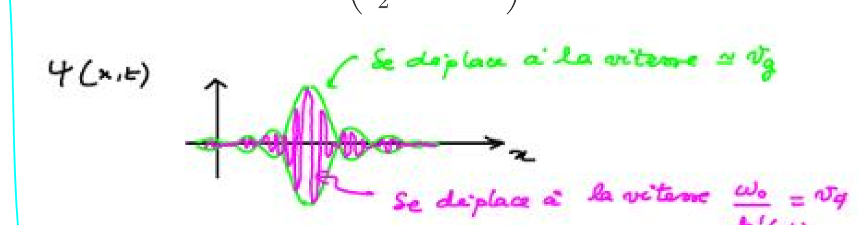
$\underline{\psi} = \displaystyle\int_0^\infty \underline{A}(\omega)\ \mathrm{e}^{j(\omega t - k'x)}\mathrm{d}\omega$

Distribution lorentzienne



Expression du paquet d'onde

$\psi = A\ \Delta\omega\ \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}(t - x/v_g)\right)\cos(\omega_0 t - k'(\omega_0)x)$



La durée séparant deux minimas d'amplitude de l'enveloppe donne :

$\dfrac{\Delta\omega}{2}\cdot\Delta t = \pi$ soit $\boxed{\Delta f_{1/2}\cdot\Delta t = 1}$