Équations différentielles usuelles

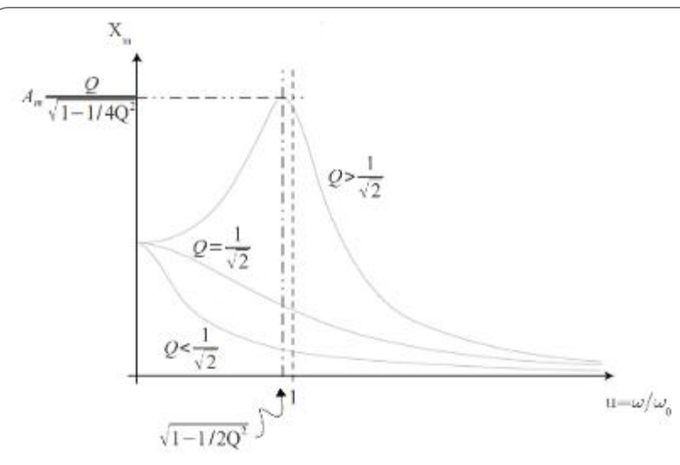
du premier ordre

- avec second membre
  - Recherche d'une solution particulière
  - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
  - Somme des deux solutions
- sans second membre
  - Solution
    $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u = 0 \qquad u = A\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$$
- **La constante est déterminée grâce aux conditions initiales**

du second ordre

- avec second membre
  - Recherche d'une solution particulière
  - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
  - Somme des deux solutions
- sans second membre
  - Avec amortissement
    $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ u = 0$$
    - Équation caractéristique
      $$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\ r + \omega_0^2 = 0$$
    - Discriminant
      $$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$
      - Discriminant positif (Q<1/2)
        $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta$$
        - Solution
          $$u = A_1\ \mathrm{e}^{r_1 t} + A_2\ \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1\ \mathrm{e}^{\beta t} + A_2\ \mathrm{e}^{-\beta t})$$
        - Régime apériodique
      - Discriminant nul (Q=1/2)
        $$\text{Racine double : } r = -\omega_0$$
        - Solution
          $$u = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$
        - Régime critique
      - Discriminant négatif (Q>1/2)
        $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha \pm j\ \Omega$$
        - Solution
          $$u = \mathrm{e}^{-\alpha t}(B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)) = \mathrm{e}^{-\alpha t} C \cos(\Omega t + \phi)$$
        - Régime pseudo-périodique
    - Pulsation propre et facteur de qualité
      $$\omega_0 \text{ et } Q$$
  - Sans amortissement
    $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\ u = 0$$
    - Solution
      $$u = A\ \cos(\omega_0 t + \phi) = B_1\ \cos(\omega_0 t) + B_2\ \sin(\omega_0 t)$$
      - Amplitude et phase
        $$A \text{ et } \phi$$
    - Avec un coefficient négatif
      $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\ell^2}\ u = 0$$
      - Solution
        $$u = A_1\ \mathrm{ch}\left(\frac{x}{\ell}\right) + A_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{x}{\ell}\right) = B_1\ \mathrm{e}^{x/\ell} + B_2\ \mathrm{e}^{-x/\ell}$$
- **Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales**

avec second membre sinusoïdal

- Solution
  $$X(t) = X_g(t) + X_p(t) \simeq X_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_X)$$
  - La solution générale de l'équation sans second membre tendant rapidement vers 0, on ne considère que la solution particulière (on se place donc en régime permanent).
  - **On ne peut donc pas appliquer les conditions initiales pour déterminer les constantes.**
- A toute grandeur X, on associe une grandeur complexe.
  $$\underline{X} = X_m\ \mathrm{e}^{j\varphi_X}\mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{X_m}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$$
  - Équation différentielle complexe associée
  - Injection de la solution complexe
    $$X_m = |\underline{X_m}| = |\underline{X}| \qquad \varphi_X = \arg(\underline{X_m})$$
- Exemple
  $$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ X = \omega_0^2\ A_m \cos(\omega t + \varphi)$$
  - Équation différentielle complexe associée
    $$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q}\ \underline{\dot{X}} + \omega_0^2\ \underline{X} = \omega_0^2\ \underline{A}_m \mathrm{e}^{j\omega t} \qquad \underline{A}_m = A_m \mathrm{e}^{j\varphi}$$
    - Injection de la solution complexe
      $$X_m = \frac{A_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \qquad \varphi_X = \varphi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$
  - 

  - Résonance en amplitude
    $$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \omega = \omega_r \neq \omega_0$$