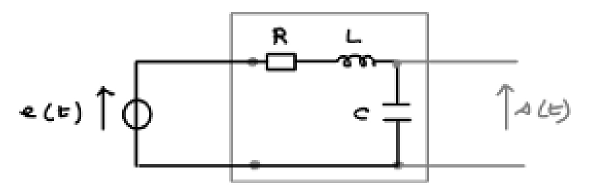
Système entrée-sortie linéaire, continu et invariant

Système entrée-sortie



- Système linéaire : système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

  $$\sum_k a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_p b_p \frac{\mathrm{d}^p e(t)}{\mathrm{d}t^p}$$

  - Théorème de superposition

    $e(t) = \lambda\ e_1(t) + \beta\ e_2(t)$

    entraine $s(t) = \lambda\ s_1(t) + \beta\ s_2(t)$
  - Invariance temporelle

    $e(t-\tau)$ entraine $s(t-\tau)$
  - Un système linéaire, continu et invariant donne d'un signal d'entrée sinusoïdal un signal de sortie sinusoïdal.

Régime harmonique

- On recherche de la réponse à une entrée sinusoïdale :

  $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$
  - Si la solution générale de l'e.s.s.m. tend rapidement vers 0 :

    $s(t) = s_h(t) + s_p(t) \simeq s_p(t)$
  - La solution particulière étant sinusoïdale, on a :

    $s(t) \simeq S\cos(\omega t + \varphi_s)$
- Méthode complexe
  - Principe

    $\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}$

    $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \leftrightarrow \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi-\pi/2)}$
  - A toute grandeur sinusoïdale x, on associe une grandeur complexe.

    $x = X\cos(\omega t + \varphi_x) \leftrightarrow \underline{x} = X\ \mathrm{e}^{j\varphi_x}\mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{X}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$

    $X = |\underline{X}| = |\underline{x}|$

    $\varphi_x = \arg(\underline{X})$
    - C'est la partie réelle de la grandeur complexe qui représente la grandeur physique.

      $x(t) = \mathcal{R}e(\underline{x}(t))$
    - Dériver et intégrer

      $\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega\ \underline{x}(t)$

      $\int \underline{x}(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$
- Équation différentielle complexe associée

  $\ddot{\underline{s}} + \frac{\omega_0}{Q}\ \dot{\underline{s}} + \omega_0^2\ \underline{s} = \omega_0^2\ \underline{E}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$

  $\underline{E} = E\ \mathrm{e}^{j\varphi_e}$
  - Injection de la solution complexe, puis résolution

    $S = f(\omega/\omega_0)$

    $\varphi_s = \arg(\underline{S})$

Fonction de transfert

- Définition

  $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}}$
  - Gain

    $G = |\underline{H}|$
  - Déphasage

    $\varphi = \varphi_s - \varphi_e = arg(\underline{H})$
  - Détermination d'une fonction de transfert
    - Impédance d'un dipôle

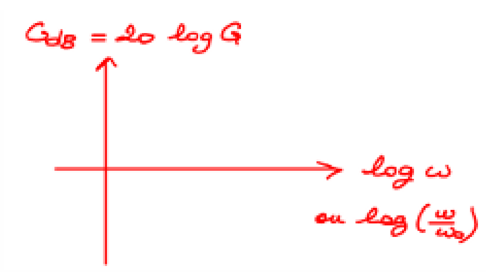
      $\underline{Z}$
    - Pour tout dipôle :

      $\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$
      - Résistance

        $\underline{Z} = R$
      - Inductance

        $\underline{Z} = jL\omega$
      - Capacité

        $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$
    - Lois des circuits
      - Lois de Kirchhoff
      - Modèles de Thévenin / Norton
      - Lois d'associations de dipôles
      - Théorème de Millman
- Diagramme de Bode
  - Courbe de gain

    - Gain en décibels

      $G_{\mathrm{dB}} = 20\log G$

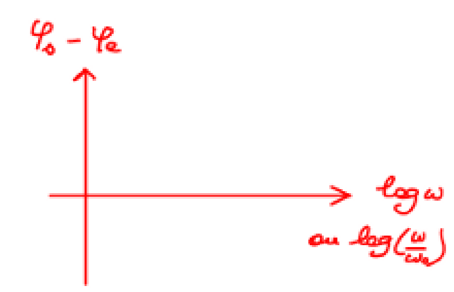
      $10\log 2 \simeq 3\ \mathrm{dB}$
    - Pulsation de coupure à - 3 dB

      $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3\ \mathrm{dB}$

      ou $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$
    - Bande passante à - 3 dB

      $G_{\mathrm{dB}}(\omega \in \Delta\omega) \geqslant G_{\mathrm{dB,max}} - 3\ \mathrm{dB}$

      ou $G(\omega \in \Delta\omega) \geqslant \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$
  - Courbe de phase

Application au filtrage

- Formes canoniques
  - Ordre1
    - Passe-bas

      $\underline{H} = H_0\ \frac{1}{1+jx}$
    - Passe-haut

      $\underline{H} = H_0\ \frac{jx}{1+jx}$
  - Ordre 2
    - Passe-bas

      $\underline{H} = H_0\ \frac{1}{1+jx/Q-x^2}$
    - Passe-haut

      $\underline{H} = H_0\ \frac{-x^2}{1+jx/Q-x^2}$
    - Passe-bande

      $\underline{H} = H_0\ \frac{jx/Q}{1+jx/Q-x^2}$
    - Coupe-bande

      $\underline{H} = H_0\ \frac{1-x^2}{1+jx/Q-x^2}$
- Filtres passe-bande ou coupe-bande

  $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$

Analyse spectrale

- Décomposition en série de Fourier
  - Toute fonction peut se décomposer en une suite infinie de fonctions sinusoïdales.

    $$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

    $$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$$
  - Avec

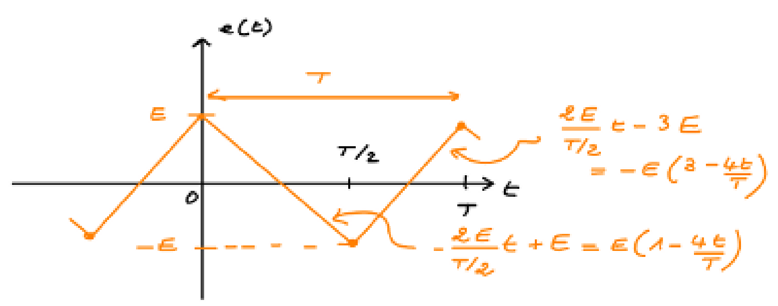
    $$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$$

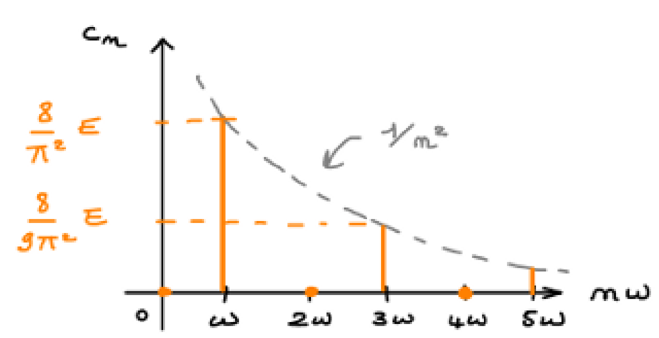
    $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

    $$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

    $$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

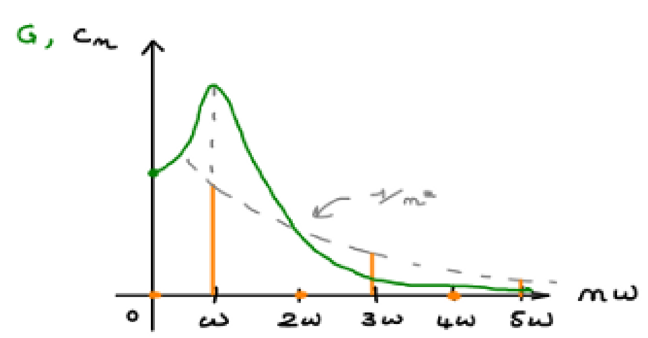
    $$\tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$
- Exemple d'un signal triangulaire

- Effet d'un filtre
  - Effet du gain sur le spectre

    $$s(t) = G(0)\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)\ c_n\cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$
  - Superposition de la courbe de gain

Stabilité

- Un système d'ordre 1 ou 2 est **stable** si **tous les coefficients de son équation différentielle sont de même signe**.