Électromagnétisme en régime variable

Équations de Maxwell dans le vide

$$\mathrm{M.T} \ : \ \boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$$

$$\mathrm{M.F} \ : \ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\mathrm{M.G} \ : \ \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\mathrm{M.A} \ : \ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \mu_0\vec{j}_C + \mu_0\vec{j}_D$$

Courant **de conduction**

$$\vec{j}_C = \vec{j}$$

Courant **de déplacement**

$$\vec{j}_D = \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La présence d'un courant de déplacement permet d'assurer la cohérence entre l'équation de M.A et l'équation de conservation de la charge.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$$

Aux fréquences accessibles au XIXe siècle, le courant de déplacement était masqué par le courant de conduction.

- En régime variable

$$\epsilon_0 \|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \sim \epsilon_0\omega E << \|\gamma\vec{E}\| \sim \gamma E$$

$$\boxed{\omega << \frac{\gamma}{\epsilon_0}}$$

- Typiquement

$$\omega << 10^{16} \ \mathrm{rad}$$

Approximation des **R**égimes **Q**uasi-**S**tationnaires **(ARQS) magnétique**

$$\|\vec{j}_D\| << \|\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}\|$$

C'est un cas particulier de régime lentement variable.

Conséquences de l'ARQS magnétique

Équations de Maxwell dans le vide

$$\mathrm{M.T} \ : \ \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{M.F} \ : \ \vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{M.G} \ : \ \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{M.A} \ : \ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j}}$$

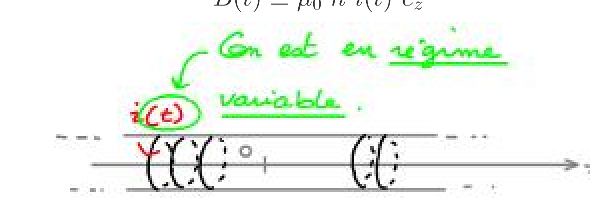
Le champ magnétique est décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on pourra utiliser les mêmes lois**.

$$\mathrm{M.T} \ : \ \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{M.A} \ : \ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j}}$$

Exemple

$$\vec{B}(t) \simeq \mu_0 \ n \ i(t) \ \vec{e}_z$$



Le champ électrique n'est pas décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on ne pourra pas utiliser les mêmes lois**.

$$\mathrm{M.G} \ : \ \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{M.F} \ : \ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}}$$

Le courant de conduction est **à flux conservatif**, comme en régime stationnaire.

$$\mathrm{M.A} \ : \ \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j} \ \mathrm{or} \ \mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} \simeq 0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

La densité volumique de charge varie peu.

$$\mathrm{div}\vec{j} \simeq 0 \ \mathrm{soit} \ \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} \simeq 0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

Loi de Faraday

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\phi_p + \phi_{\mathrm{ext}})}{\mathrm{d}t}}$$

Phénomène d'induction

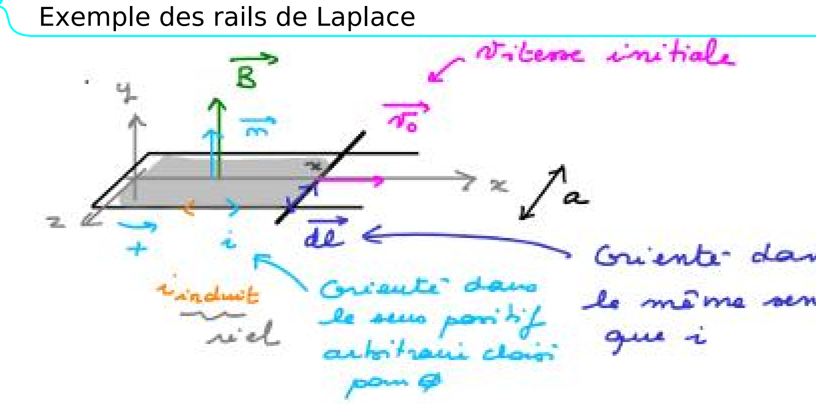
Flux propre

$$\phi_p = \iint_S \vec{B}_{\mathrm{propre}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Flux extérieur

$$\phi_{ext} = \iint_S \vec{B}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Exemple des rails de Laplace



Le flux propre est négligé ici.

Équation électrique

$$e = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -Bav \ \mathrm{or} \ e = Ri \ \mathrm{soit} \ \boxed{-Bav = Ri}$$

Équation mécanique

$$m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}_L = \int_\ell i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = iaB \ \vec{e}_x \ \mathrm{soit} \ \boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB}$$

Découplage

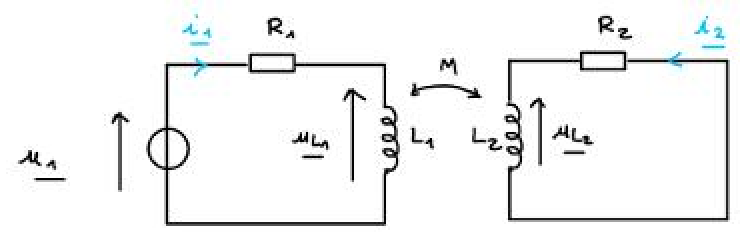
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0} \ \mathrm{soit} \ \boxed{v = v_0 \ \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Couplage par **induction**

Circuits couplés par mutuelle induction en régime variable

$$\underline{u}_1 = R_1 \ \underline{i}_1 + L_1\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{d}t}$$

$$0 = R_2 \ \underline{i}_2 + L_2\frac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t}$$



Découplage

$$\underline{u}_1 = \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{i}_1$$

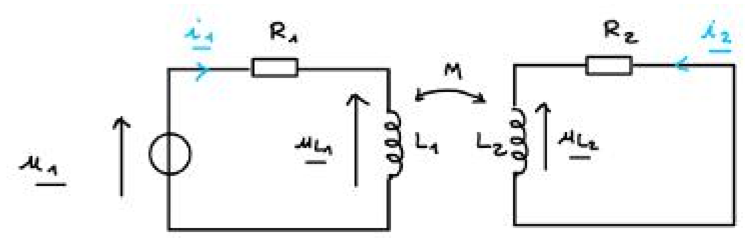
Le couplage est équivalent à un unique dipôle d'impédance

$$\underline{Z} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

Aspects énergétiques de circuits couplés par mutuelle induction

$$u_1 = R_1 \ i_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \rightarrow \times i_1$$

$$0 = R_2 \ i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \rightarrow \times i_2$$



Bilan d'énergie

$$u_1 i_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2\right) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

Énergie magnétique des deux circuits couplés

$$W_{L,M} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2$$

Condition sur le coefficient de mutuelle induction

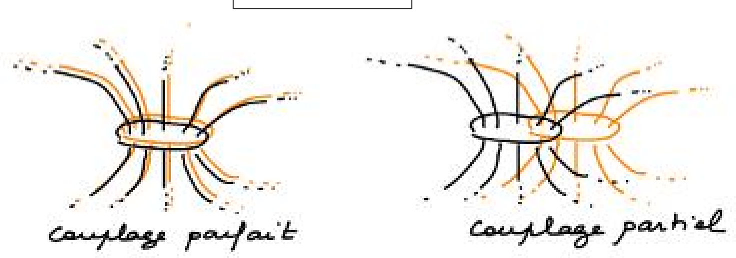
$$W_{L,M} = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V \geqslant 0$$

$$\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 x^2 + Mx \geqslant 0 \ \mathrm{avec} \ x = \frac{i_2}{i_1}$$

$$\Delta \leqslant 0 \ \mathrm{soit} \ \boxed{M^2 \leqslant L_1 L_2}$$

Couplage parfait, couplage partiel

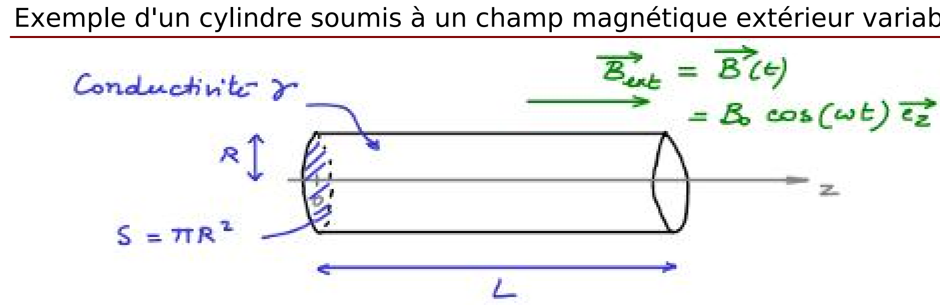
$$\boxed{M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}} = M_{\max}$$



Courants de Foucault

Phénomène d'induction

Exemple d'un cylindre soumis à un champ magnétique extérieur variable



ARQS magnétique

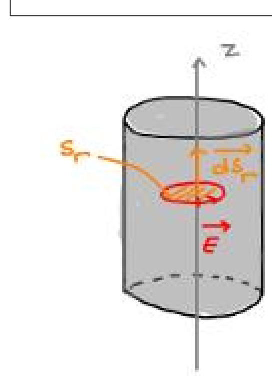
Champ magnétique créé par les courants induits négligé

Loi de Faraday

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$$

$$E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$$

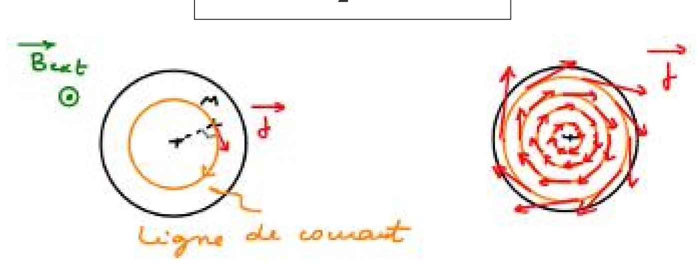
$$\boxed{\vec{E}_{\mathrm{induit}} = \frac{r\omega B_0}{2}\sin(\omega t) \ \vec{e}_\theta}$$



Courants induits

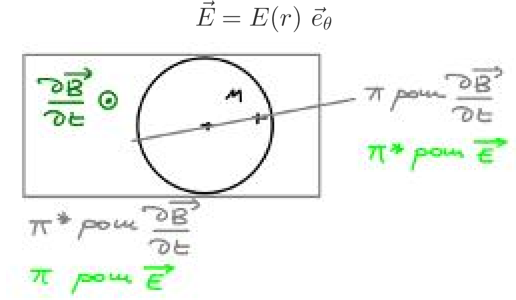
$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{induit}} = \frac{r\gamma\omega B_0}{2}\sin(\omega t) \ \vec{e}_\theta}$$



Symétries et invariances

$$\vec{E} = E(r) \ \vec{e}_\theta$$



Aspects énergétiques

$$p_J = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \ \mathrm{d}V = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L\pi R^4}{8}\sin^2(\omega t)$$

$$\boxed{<p_J> = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L\pi R^4}{16}}$$

Intérêt du feuilletage

$$\boxed{<p'_J> = \frac{<p_J>}{N}}$$