Équations différentielles

- du premier ordre
  - avec second membre
    - Recherche d'une solution particulière
    - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
    - Somme des deux solutions
  - sans second membre
    $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u = 0$$
    - Solution
      $$u = A\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$$
      - La constante est déterminée grâce aux conditions initiales
- du second ordre
  - avec second membre
    - Recherche d'une solution particulière
    - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
    - Somme des deux solutions
  - sans second membre
    - Avec amortissement
      $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ u = 0$$
      - Équation caractéristique
        $$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\ r + \omega_0^2 = 0$$
        - Déterminant
          $$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$
          - Déterminant positif (Q<1/2)
            $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta$$
            - Solution
              $$u = A_1\ \mathrm{e}^{r_1 t} + A_2\ \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1\ \mathrm{e}^{\beta t} + A_2\ \mathrm{e}^{-\beta t})$$
              - Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales
            - Régime apériodique
          - Déterminant nul (Q=1/2)
            $$\text{Racine double}\ :\ r = -\omega_0$$
            - Solution
              $$u = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$
              - Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales
            - Régime critique
          - Déterminant négatif (Q>1/2)
            $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha \pm j\ \Omega$$
            - Solution
              $$u = \mathrm{e}^{-\alpha t}(B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)) = \mathrm{e}^{-\alpha t} C \cos(\Omega t + \phi)$$
              - Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales
            - Régime pseudo-périodique
      - Pulsation propre et facteur de qualité
        $$\omega_0 \text{ et } Q$$
    - Sans amortissement
      $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\ u = 0$$
      - Solution
        $$u = A\ \cos(\omega_0 t + \phi) = B_1\ \cos(\omega_0 t) + B_2\ \sin(\omega_0 t)$$
        - Amplitude et phase
          $$A \text{ et } \phi$$
        - Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales